BAC BLANC – SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Épreuve de spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Le sujet sera laissé dans votre copie puisque certaines parties devront être complétées sur celui-ci.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les 4 exercices

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 5 points

Au basket-ball, il existe deux sortes de tir :

• les tirs à deux points. Ils sont réalisés près du panier et rapportent deux points s'ils sont réussis.

• les tirs à trois points. Ils sont réalisés loin du panier et rapportent trois points s'ils sont réussis.

Stéphanie s'entraîne au tir. On dispose des données suivantes :

• Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points. Parmi eux, 60 % sont réussis.

• Trois quarts de ses tirs sont des tirs à trois points. Parmi eux, 35 % sont réussis.

1. Stéphanie réalise un tir. On considère les évènements suivants :

   D : « Il s'agit d'un tir à deux points ».

   R : « le tir est réussi ».

   a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

   b. Calculer la probabilité que Stéphanie réussisse un tir à 2 points.

   c. Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir est égale à $0,4125$.

   d. Stéphanie réussit un tir. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points. Arrondir le résultat au centième.

2. Stéphanie réalise à présent une série de 10 tirs à trois points.

   On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis.

   On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir à trois points est égale à $0,35$.

   a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

   b. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

   c. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus. Arrondir le résultat au centième.

   d. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs. Arrondir le résultat au centième.

3. Soit n un entier naturel non nul.

   Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points.

   On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité qu'elle réussisse un tir à trois points est égale à $0,35$.

   Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité que Stéphanie réussisse au moins un tir parmi les n tirs soit supérieure ou égale à $0,99$.

Exercice 2 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points F(2 ; 5 ; - 1), G(3 ; 2 ; 1), H(1 ; 3 ; −2) et la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=3+k \\ y=1-4k \\ z=2+3k \end{cases}, k\in\mathbb{R}$

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

Réponse A : M(1 ; 9 ; 8) Réponse B : N(−3 ; −4 ; 6)

Réponse C : P(0 ; 13 ; −7) Réponse D : Q(−5 ; −7 ; −1)

2. On peut affirmer que :

Réponse A : $\widehat{FGH}=90°$ Réponse B : $\widehat{FGH}=0°$

Réponse C : $\widehat{FGH}>90°$ Réponse D : $\widehat{FGH}\simeq 38°$

3. Les droites (GH) et Δ sont :

Réponse A : strictement parallèles Réponse B : sécantes en R(1 ; 9 ; - 4)

Réponse C : non coplanaires Réponse C : sécantes en S(4 ; 3 ; 2)

4. Soit b un nombre réel. Une solution de l'équation différentielle y' = 8y + b est la fonction définie pour tout réel x par :

Réponse A : $f(x)=be^{8x}-\frac{b}{8}$ Réponse B : $f(x)=6e^{-8x}-\frac{b}{8}$

Réponse C : $f(x)=8e^{-8x}+\frac{b}{8}$ Réponse D : $f(x)=-12e^{8x}+\frac{b}{8}$

5. Soit n un entier naturel supérieur à 4. On dispose de deux paquets de cartes toutes différentes. Le premier paquet est composé de 6 cartes alors que le deuxième paquet est composé de n cartes. On tire au hasard simultanément 2 cartes du premier paquet et 3 cartes du deuxième pour constituer une main de 5 cartes (l'ordre ne nous intéresse pas).

Le nombre de mains de 5 cartes envisageables est :

Réponse A : $6\times5\times n\times(n-1)\times(n-2)$ Réponse B : $\frac{6!\times n!}{2\times3}$

Réponse C : $\binom{n+6}{5}$ Réponse D : $\frac{n!\times6!}{(n-3)!\times3\times2\times2\times4\times3\times2}$

Exercice 3 5 points

On considère la fonction définie sur l'intervalle I =]0 ; + ∞[par : $f(x)=(2-\ln x)\times(\ln x)$

On admet que cette fonction est 2 fois dérivable sur l'intervalle I.

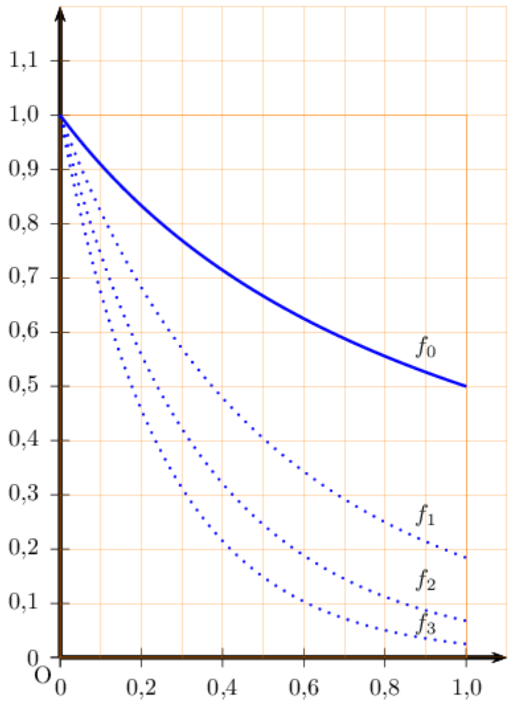
1. Déterminer les limites de f en + ∞ et en 0. Interpréter graphiquement la limite en 0.
2. Montrer que la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en exactement 2 points dont on précisera les coordonnées.
3. Montrer que pour tout x appartenant à I, $f'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x}$.
4. En justifiant soigneusement, dresser le tableau de variations de f sur I.
5. Montrer que pour tout x appartenant à I, $f''(x)=\dfrac{2(\ln x-2)}{x^2}$.
6. Étudier la convexité de f sur I et préciser les éventuels points d'inflexion.

Exercice 4 5 points

On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$I_n=\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx$ et $J_n=\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}dx$

1. Sont représentées ci-contre les fonctions f_n définies sur l'intervalle [0 ; 1] par $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{1+x}$ pour différentes valeur de n .



a. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (I_n) en expliquant votre démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

2.

a. Montrer que pour tout entier $n\geq 0$ et pour tout nombre $x\in[0;1]$: $0\leq\dfrac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\leq\dfrac{e^{-nx}}{1+x}\leq e^{-nx}$

b. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3.

a. Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier $n\geq 1$:

$I_n=\dfrac{1}{n}(1-\dfrac{e^{-n}}{2}-J_n)$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.