Bac 2023, métropole : sujet 1

Exercice 1 : QCM probabilités 5 points

1. $p_G(D) = \dfrac{P(D \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0,002}{0,2} = 0,01$
   Réponse b.
2. D'après la formule des probas totales $p(D) = P(D \cap G) + P(D \cap \overline{G})$
   donc $P(D \cap \overline{G}) = P(D) - P(D \cap G) = 0,082 - 0,002 = 0,08$.
   Réponse b.
3. On cherche à calculer $p_D(G)$ soit $\dfrac{P(D \cap G)}{P(D)} = \dfrac{0,2}{8,2} \approx 0,0244$
   Réponse b.
4. En utilisant le calculatrice $p(X > 2) = 1 - p(X \leq 2) \approx 0,789$
   Réponse b.
5. $p(X = 0) = 0,918^n$, on cherche n tel que $0,918^n \geq 0.4$ soit $n \leq \dfrac{\ln(0,4)}{\ln(0,918)}$
   Réponse c.

Exercice 2 : Fonctions 5 points

1. $\lim\limits_{x \to 0} -8\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$
2. D'après les croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x)}{x^2} = 0$, or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
3. Sur $]0; +\infty[$ les deux fonctions carrée et logarithme sont dérivables en utilisant la formule de la somme de deux dérivés on obtient :
   $f'(x) = 2x - \dfrac{8}{x} = \dfrac{2x^2 - 8}{x} = \dfrac{2(x^2 - 4)}{x}$
4. $(x^2 - 4) = (x + 2)(x - 2)$ Sur $]0; +\infty[$ $(x^2 - 4)$ est du signe de $(x - 2)$, on a donc le tableau de variation suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$4 - 8\ln(2) \approx -1.55$	$\nearrow$	$+\infty$

5. La fonction f est continue sur [1 ;2] car elle est dérivable, elle est strictement croissante de plus $f(1) = 1 > 0$ et $f(2) \approx -1,55 < 0$.
   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α sur $[1; 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$ Pour 0<x<1, $f(x) > f(1)$ car f est décroissante. On a donc bien le résultat demandé.
6. Comme f est décroissante sur $]0; 2]$ et $f(\alpha) = 0$, f est positive sur $]0; \alpha]$ puis négative sur $[\alpha; 2]$. Comme f est croissante sur $]2; +\infty]$ et $f(\beta) = 0$, f est négative sur $[2; \beta]$ puis positive $[\beta; +\infty]$.
7. Sur $]0; +\infty[$,on a $g_k'(x) = f'(x)$ donc f et g_k ont un tableau de variation similaire seule la valeur du minimum change ici le minimum de g_k est $4 - 8\ln(2) + k$.
   Donc g_k est toujours positive si et seulement si son minimum est positif soit pour $k = 8\ln(2) - 4$

Exercice 3 : Suites 5 points

Partie A

1. $u_2 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 4$ et $u_3 = 0,9 \times 4 + 1,3 = 4,9$
Au deuxième mois il y a 400 questions sur la faq et au cours du troisième 490.

2. Posons $\mathcal{P}_n$ la propriété : "$u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0.9^n$"

Initialisation : $13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^1 = 13 - 10 = 3$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
Démontrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
$u_{n+1} = 0,9 \times u_n + 1,3 = 0.9 \times (13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n) + 1,3$ d'après l'hypothèse de récurrence
En développant, on obtient $u_{n+1} = 11,7 - \dfrac{100}{9} \times 0.9^{n+1} + 1,3 = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0.9^{n+1}$.
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence sur n, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

3. Cherchons le signe de $u_{n+1} - u_n$, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{100}{9} \times (0,9^{n+1} - 0,9^n) = -\dfrac{100}{9} \times 0,9^n \times (0,9 - 1)$
Deux des trois facteurs de l'expression précédente sont négatifs et un est positif donc cette différence est positive, la suite est donc croissante.

4. En utilisant le calculatrice, on s'aperçoit que le seuil est atteint pour $n = 9$, au neuvième mois il y aura plus de 850 questions dans la FAQ

Partie B

1. A l'aide de la calculatrice on obtient $v_1 = 3$ et $v_2 \approx 4,04$

2. On cherche n tel que $v_n > 8,5$, soit $6 \times e^{-0.19(n-1)} < 0.5$.
En utilisant la fonction logarithme, on obtient $-0.19(n-1) < -\ln(12)$ soit $n > \dfrac{100\ln(12)}{19} + 1$
Soit pour $n \geq 15$

Partie C

1. C'est la première solution qui permet cela d'après les questions précédentes (atteint pour $n = 9$ au lieu de $n = 15$)

2. Comme $0,9^n$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini on peut dire que la suite u_n tend vers 13 quand n tend vers l'infini.
Comme e^{-n} tend vers 0 quand n tend vers l'infini la seconde suite v_n tend vers 9 quand n tend vers l'infini comme limite de composition de fonction.
La première modélisation aura donc à long terme le plus grand nombre de questions

Exercice 4 : Géométrie 5 points

1. E a pour coordonnées (0 ;0 ;1), C (1 ;1 ;0) et G(1 ;1 ;1)

2. $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et E (0 ;0 ;1)

donc l'équation paramétrique de (EC) est : $\begin{cases} x &= t \\ y &= t \\ z &= 1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

3. Démontrons $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GBD) : $\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{BG}$.

$\overrightarrow{DG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{DG} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 1 = 0$

donc $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DG}$

$\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{DG} = 1\times 0 + 1\times 1 + (-1)\times 1 = 0$

donc $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BG}$

Donc la droite (EC) est bien orthogonale au plan (BDG)

4. **a.** $\overrightarrow{EC}$ étant d'après la question précédente un vecteur normal du plan (BDG) sont équation cartésienne est donc de la forme $x + y - z + d = 0$.

Or G appartient à ce plan donc ces coordonnées sont solutions de cette équation.

$1 + 1 - 1 + d = 0$ soit $d = -1$.

b. $I(x; y; z)$ vérifie le système suivant : $\begin{cases} x &= t \\ y &= t \\ z &= 1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et de plus $x + y - z - 1 = 0$ donc

$t + t - 1 + t - 1 = 0$ soit $3t - 2 = 0$. Donc $t = \dfrac{2}{3}$.

Ainsi I a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$

c. le vecteur $\overrightarrow{EI}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{2}{3}\\ -\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$ donc $EI = \sqrt{3\times\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

5. **a.** En prenant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DG}$ on montre que ces trois longueurs sont égale à $\sqrt{2}$

b. La hauteur d'un triangle équilatéral est égal à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$ où c est la longueur du coté, cela se montre facilement avec le théorème de Pythagore ou les formules de trigonométrie.

Donc l'aire du triangle BDG est $\mathcal{A} = \dfrac{b\times h}{2} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. $V = \dfrac{1}{3}\times\mathcal{B}\times EI = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{3}$