BAC BLANC – SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

Épreuve de spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Le sujet sera laissé dans votre copie puisque certaines parties devront être complétées sur celui-ci.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les exercices 1, 2 et 3, et choisit de traiter

soit l'exercice A ou l'exercice B.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 5 points

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1er niveau, 75 vont au 2e niveau et 100 vont au 3e niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2e niveau, les autres vont au 1er niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.
On pourra considérer les événements suivants :

- N1 : « La personne va au premier niveau. »
- N2 : « La personne va au deuxième niveau. »
- N3 : « La personne va au troisième niveau. »
- E : « La personne emprunte l'escalier. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2.
   a. Montrer que la probabilité que la personne aille au 2e niveau par l'escalier est égale à $\frac{1}{12}$.

   b. Montrer que les événements N1, N2 et N3 sont équiprobables.

   c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2e niveau.

3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.
   On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2e niveau.

   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   b. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2e niveau.

   c. En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2e niveau ?

4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

   a. Traduire par une inégalité : la probabilité de l'événement « au moins une personne va au 2^{e} niveau » est supérieure ou égale à 0,99.

   b. Déterminer algébriquement le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'événement « au moins une personne va au 2e niveau » soit supérieure ou égale à 0, 99.

Exercice 2 5 points

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x+2)e^{x-4}-2$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Montrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.
3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g .
4. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
6. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-x^2e^{x-4}$.

1. Résoudre l'équation $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=-x\,g(x)$ où g est la fonction de la partie A.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0;+\infty[$ est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

Partie C : Primitive

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère la courbe représentative C_f de la fonction f et la parabole P d'équation $y=x^2$.

1. Déterminer la position relative des courbes C_f et P.
2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x)=(x^2-2x+2)e^{x-4}$.
   Calculer $H'(x)$ et en déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 — 5 points

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres. Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : Modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1 mètre. Pour tout entier naturel n, on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation. On a ainsi $u_0 = 1$.
Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs se traduit par l'égalité :

$$u_{n+1} = u_n + 0{,}05(20 - u_n) \text{ pour tout entier naturel n.}$$

1. Vérifier que $u_1 = 1{,}95$.
2.
   a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 1$.
   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0{,}95^n$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie II : Modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t, exprimé en jour. D'après le modèle de von Bertalanfly, cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = 0{,}05(20 - y)$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ et y' désigne sa fonction dérivée.

1. Déterminer la solution L de (E) vérifiant L(0) = 1.
2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que L'(t) représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t.
   a. Comparer L'(0) et L'(5).
   b. Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$.
   Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice ?

Exercice au choix du candidat
Un seul des deux exercices A ou B doit être traité

Exercice A 5 points

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée en annexe. Toutes les arêtes sont de longueur 1. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AK})$.

1.
   a. On admet que $IE=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donner les coordonnées des points I, E et F.
   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).
2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].
   a. Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, intersection des plans (EMN) et (FDC).
   c. Construire sur l'annexe la section du solide ADECBF par le plan (EMN).

Exercice B 5 points

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué 1 point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Affirmation 1** : $\lim_{x \to +\infty} (e^{2x} - e^{x} + \frac{3}{x}) = 0$.

2. **Affirmation 2** : L'équation $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

3. **Affirmation 3** : La fonction g définie sur p $\mathbb{R}$ ar $g(x) = x^2 - 5x + e^x$ est convexe.

4. **Affirmation 4** : Pour tous réels a et b, $(e^{a+b})^2 = e^{2a} + e^{2b}$.

5. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x - \frac{3}{x}$.

   Affirmation 5 : Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est $y = 7x + 7$

Annexe

Exercice A